

# MEG-SD: Un Modello di Equilibrio Economico Generale Spaziale e Dinamico per l'Italia

D. Cufari<sup>1</sup>, R. Magnani<sup>2</sup>, F. Perali<sup>3</sup>, P.L. Scandizzo<sup>4</sup>

*Riassunto:* Obiettivo di questo documento è la presentazione del modello MEG-SD, un modello dinamico di equilibrio generale economico computabile, sviluppato per la valutazione di piani e progetti e, in particolare, per l'analisi di impatto del PNRR. Il documento presenta la struttura di MEG-SD a livello nazionale e multiregionale, con la possibilità di analizzare l'impatto per un arco temporale di breve, medio e lungo periodo. Il modello si distingue per l'elevato livello di micro-fondazione che consente un'analisi distributiva molto dettagliata su redditi, consumi, risparmi, ineguaglianza e benessere sociale e approfondimenti sul mercato del lavoro per ogni settore dell'economia.

*Acknowledgments:* Gli autori ringraziano la Struttura di Missione Investitalia per il finanziamento dello studio su "Modelli di Politica Economica per il Rilancio degli Investimenti a Livello nazionale e Locale".

---

<sup>1</sup> Consulente indipendente;

<sup>2</sup> Université Sorbonne Paris Nord e CEPN;

<sup>3</sup> Università di Verona;

<sup>4</sup> Università di Roma "Tor Vergata"

## Sommario

Introduzione .....	3
Disegno del Modello di Equilibrio Generale Spaziale e Dinamico MEG-SD.....	4
Scenari di valutazione di impatto.....	8
Descrizione analitica del modello .....	9
Produzione .....	9
Famiglie .....	12
Governi.....	14
Investimenti e accumulazione di capitale .....	14
Commercio interregionale e internazionale .....	15
Equilibrio .....	16
Dinamica .....	17
Riferimenti Bibliografici.....	17

## Introduzione

Obiettivo di questo documento è la presentazione del modello MEG-SD, un modello dinamico e spaziale di equilibrio economico computabile, sviluppato per la valutazione di piani e progetti e, in particolare, per l'analisi di impatto del PNRR. Il documento presenta la struttura del modello MEG-SD a livello nazionale e multiregionale. Le funzionalità del modello consentono di analizzare l'impatto per un arco temporale di breve, medio e lungo periodo, utilizzando un elevato livello di micro-fondazione che consente un'analisi distributiva su redditi, consumi, risparmi, ineguaglianza e benessere sociale e approfondimenti dettagliati sul mercato del lavoro per ogni settore dell'economia.

È buona prassi sottoporre le valutazioni dei progetti proposti dall'Amministrazione centrale a una revisione paritaria indipendente per prevenire che la stima dei benefici sia eccessivamente ottimistica e che i costi siano sottostimati o che vi siano valutazioni politiche disgiunte dalle evidenze progettuali (Art. 7 D.Lgs. 228/2011). Il modello proposto può essere interpretato nell'ottica di una validazione indipendente delle stime governative, sebbene il confronto tra predizioni del nostro modello MEG-SD multiregionale e dinamico e le previsioni del modello MACGEM-IT nazionale e statico (Socci *et al.* 2021) adottato dal Ministero dell'Economia e delle Finanze (MEF) non possano essere direttamente confrontati, poiché MACGEM-IT è un modello statico aggregato che non include la dimensione spaziale e temporale. Per una ragione analoga i risultati sviluppati in questo lavoro non possono essere direttamente confrontati con le proiezioni macroeconomiche ottenute con il modello QUEST, usato sia dal MEF, sia dalla Commissione Europea. Quest'ultimo è un modello dinamico, ma non include né una vera dimensione temporale, essendo limitato alla analisi di stati stazionari di equilibrio, né la dimensione spaziale. Tuttavia, un paragone dei risultati a livello aggregato può fornire importanti indicazioni sulla robustezza delle stime prodotte sotto le diverse ipotesi proprie dei diversi modelli. In particolare, il modello di equilibrio generale MEG-SD è in grado di produrre simulazioni o cosiddette previsioni condizionate, per scenari ipotetici di breve, medio e lungo periodo per un'economia nazionale e regionale aggregata a 20 settori, differenziate per tre tipologie di lavoro e sette tipologie di capitale, relative anche all'impatto sulla distribuzione dei redditi e sulle entrate fiscali per 10 tipologie di famiglie corrispondenti ai livelli di reddito. Sia l'accuratezza, sia l'elevato dettaglio di queste previsioni possono fornire importanti elementi di analisi per identificare le condizioni per mantenere l'intero piano su un sentiero sostenibile e di pieno utilizzo delle risorse entro il 2026.

Benché limitati agli scenari ipotetici alternativi identificabili, i risultati del modello MEG possono essere utili anche in fase di *project review*. Durante il periodo di realizzazione di un progetto le circostanze cambiano continuamente. Le decisioni prese al tempo  $t$  potrebbero non essere più ottimali al tempo  $t + 1$ . Queste devono pertanto essere adeguate dato il nuovo insieme di informazioni. Il processo di revisione deve essere dunque molto flessibile per consentire cambiamenti rapidi nei pagamenti programmati, o nelle fonti di approvvigionamento, o in relazione a variazioni normative. Ad esempio, se i ritardi nell'attuazione del progetto aumentano i costi, le nuove richieste di finanziamento dovrebbero riflettere tali aumenti dei costi. In teoria, ogni nuova richiesta di finanziamento dovrebbe essere accompagnata da un'analisi costi-benefici aggiornata nell'ambito di un processo di monitoraggio attivo piuttosto che passivo. Il disegno dinamico del MEG-SD può essere molto utile anche per il processo di revisione sia a livello nazionale sia regionale poiché consentirebbe di effettuare stress test di tipo tecnico e finanziario durante il ciclo di vita del PNRR al fine di prevenire situazioni di criticità nei diversi settori dell'economia nazionale e regionale. La capacità di riformulare rapidamente le ipotesi

sulla evoluzione delle variabili esogene è particolarmente importante, considerata la natura del PNRR che, oltre che un piano di progetti è anche un piano di riforme istituzionali, con una evidente e in parte imprevedibile connessione tra l'efficienza di realizzazione dei progetti e delle riforme.

## Disegno del Modello di Equilibrio Generale Spaziale e Dinamico MEG-SD

Il MEG-SD è un modello di equilibrio economico generale computabile dinamico e spaziale che aggrega i 63 settori delle SAM nazionali o regionali sottostanti in 20 settori, distingue 10 tipologie di famiglie in base ai decili di reddito, 7 tipologie di capitale e 3 tipologie di lavoro. Per dare una dimensione della complessità dell'analisi, il modello a 20 regioni contempla 1.700.000 equazioni. Le informazioni statistiche fondamentali del modello sono basate su una serie di matrici di contabilità sociale regionali e sulla loro aggregazione a vari livelli. Le matrici stesse presentano un elevato livello di dettaglio nei consumi, risparmi, redditi e lavoro, sia in termini di settori produttivi e di beni e servizi, sia in termini di agenti economici con diverse caratteristiche istituzionali, redditi e spesa. La dinamica del modello MEG-SD è calibrata all'equilibrio stazionario, nel senso che la sua traiettoria temporale implica che le variabili endogene del modello convergono verso uno stato di lungo termine dell'economia in cui il loro tasso di crescita tende ad essere costante.

*Table 1: Lista dei Settori*

S1	Agricoltura	S11	Energia
S2	Attività estrattiva	S12	Costruzioni
S3	Industria alimentare	S13	Commercio
S4	Industria tessile, legno, carta	S14	Trasporti
S5	Industria chimica e farmaceutica	S15	Servizi
S6	Industria metallurgica	S16	R&D
S7	Computers	S17	Pubblica Amministrazione
S8	Apparecchiature elettriche	S18	Istruzione
S9	Macchinari	S19	Sanità
S10	Mezzi di trasporto	S20	Assistenza Sociale

Per catturare le specificità delle tecnologie e dei sentieri di accumulazione associabili ai diversi tipi di capitale, sono state considerate sette tipologie di beni capitali riguardanti, rispettivamente i settori delle costruzioni, dei macchinari, computers, apparecchiature elettriche, mezzi di trasporto, altri beni capitali e la Ricerca e Sviluppo. Questa scelta è anche legata all'importanza di cogliere l'effetto degli investimenti nella *digital revolution* del primo pilastro del PNRR da, per esempio, l'impatto degli investimenti in ricerca e sviluppo della quarta missione. Tutte le tipologie corrispondono a stock di capitale detenute dalle imprese con rendimenti diversi a seconda dei settori.

I modelli di investimento possono essere suddivisi in tre categorie di modelli *putty-putty*, *putty-clay* e *clay-clay* in base alle ipotesi sulla risposta degli investimenti di capitale alle variazioni dei prezzi relativi

catturata dall'elasticità della sostituzione dei fattori. Nei modelli *putty-putty* si assume che l'elasticità della sostituzione dei fattori sia diversa da zero sia prima dell'investimento (ex ante) sia dopo (ex post). Ciò significa che, come nel modello di Solow (1962), una macchina anche dopo la sua installazione può essere modificata in modo da accomodare un numero arbitrario di lavoratori. Per una elasticità pari a 1, per esempio, questa ipotesi comporta che un aumento del costo relativo del capitale porta a una diminuzione proporzionale della domanda di capitale. Nei modelli *clay-clay*, l'elasticità della sostituzione del fattore è uguale a zero sia ex ante, sia ex post, per cui la domanda di capitale è insensibile alle variazioni del costo del capitale (Phelps, 1963). Nei modelli *putty-clay* (Johansen, 1959) la situazione è intermedia, nel senso che la elasticità è maggiore di zero ex ante, mentre ex post è inizialmente pari a zero, ma nel lungo periodo aumenta e tende all'unità. L'ipotesi sottostante è che i processi produttivi si avvantaggiano di fattori molto più mobili che possono adattare le scelte tecnologiche alle variazioni dei costi dei fattori in modo più efficiente.

Il modello MEG adotta l'ipotesi innovativa di una struttura del capitale basata su tre livelli di sostituibilità: (a) tra settori, (b) tra fattori all'interno di un settore, (c) tra fattori e settori. Per la elasticità tra settori, si assume che alcuni beni capitali possano essere specializzati e quindi non trasferibili da un settore all'altro. Ciò significa che la loro elasticità di sostituzione ex ante è maggiore di zero (*putty*), mentre ex post è zero (*clay*) tra settori. Per le elasticità tra fattori all'interno dei settori, si assume che le elasticità dei beni capitali, ex ante siano maggiori di zero, mentre ex post, per il capitale specializzato, fisso settorialmente, le elasticità siano maggiori di zero e con valori diversi da settore a settore.

Le elasticità di sostituzione adottate sono presentate nel paragrafo 2.8 (Tabelle 5, 6, e 7). Infine, per le elasticità tra fattori e settori, si assume che una forma indifferenziata di capitale "putty-putty" sia disponibile e possa essere trasferita da settore a settore e, all'interno di ciascun settore con elasticità diverse dipendenti dalla tecnologia del settore stesso. Tutte le tipologie di capitale (costruzioni, macchinari, computers, apparecchiature elettriche, mezzi di trasporto, altri beni capitali, R&D) sono (imperfettamente) mobili tra i settori. Pertanto, lo stock di capitale impiegato in un settore all'inizio di ogni periodo è endogeno e dipende dal rendimento del capitale nel settore.

Table 2: Tipologie di capitale (K)

	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7
Tipologie di capitale	Costruzioni	Macchinari	Computers	Apparecchiature elettriche	Mezzi di trasporto	Altri beni capitali	R&D

Per ogni settore sono riportate le proporzioni di tre tipologie di lavoro. Queste sono distinte in lavoro a basso, medio e alto livello di abilità in relazione al livello di educazione (fino alla scuola media, liceo e educazione universitaria) conseguito dagli impiegati in un certo settore sulla base di dati regionali

derivati dall'Anagrafe Statistica delle Imprese Attive (ASIA-Imprese) dell'ISTAT. Come mostrato nella tabella 5 (vedi paragrafo 2.8), l'elasticità di sostituzione del lavoro secondo le varie tipologie è 0.5.

Table 3: Tipologie di lavoro (L)

	L1	L2	L3
Tipologie di lavoro	Low skilled	Medium skilled	High skilled

Il modello utilizza le matrici di contabilità sociale a prezzi di mercato, cioè comprensive della tassazione indiretta, SAM regionali del 2015 per ciascuna regione utilizzando le informazioni in ISTAT (2014, 2015 a,b,c) e usando la metodologia riportata nell'appendice del 1 Studio del presente rapporto che coniuga la metodologia descritta in Scandizzo e Ferrarese (2015) e la metodologia sviluppata presso l'*Economics Living Lab* sia per quanto concerne l'utilizzo del data base integrato sugli standard di vita delle famiglie italiane (Dalla Chiara, Menon, Perali 2019) utilizzato per l'inclusione delle informazioni sociali della matrice relative a consumi, redditi e risparmi delle famiglie italiane. Queste metodologie consentono di attuare un'analisi distributiva dell'impatto sia per la ricostruzione dei flussi regionali con la metodologia CHARM, sia dell'integrazione tra le matrici regionali attraverso il modello di input-output multiregionale (MRIO) illustrato nello studio 2 del presente rapporto.

Il Modello MEG-SD incorpora diverse versioni che possono essere selezionate attraverso un cruscotto (Dashboard) di scelta che presenta le opzioni sottoelencate. Ogni colonna rappresenta una dimensione di scelta.

Table 4: Dashboard del modello MEG-SD

<b>Dimensione Spaziale</b>	<b>Chiusura</b>	<b>Competizione</b>	<b>Cambiamento Tecnologico</b>
Nazionale	Walrasiana	Perfetta	Esogeno
Nord/Sud, 4 Macroregioni, 20 regioni	Keynesiana	Monopolistica	Endogeno

La chiusura può essere di tipo Walrasiano o Keynesiano. Le ipotesi sulla concorrenza possono essere variate dalla concorrenza perfetta alla competizione di tipo monopolistico *a la* Dixit - Stiglitz (Zhai 2008). Quest'ultima è una forma di concorrenza imperfetta con molti produttori che competono tra loro offrendo beni differenziati e quindi imperfetti sostituti l'uno dell'altro. I produttori hanno un certo grado di controllo sui prezzi. Questa ipotesi viene spesso utilizzata per modellare le scelte di entrata e uscita di imprese, date le diverse condizioni di efficienza produttiva di ogni settore industriale. Il cambiamento tecnologico può essere esogeno o endogeno. Tutti i modelli sono calibrati all'equilibrio

stazionario (attraverso la calibrazione degli stocks). Tutti i mercati sono equilibrati a livello regionale (beni e servizi, lavoro e capitale).

Dal punto di vista geografico-spaziale, il modello è disaggregato nelle macroregioni del Nord-Ovest, Nord-Est, Centro Italia e Sud, e si basa su una dinamica alla Solow dove le famiglie massimizzano una funzione di utilità soggetta a un vincolo di bilancio intertemporale, sicché il loro risparmio tende ad essere uguale a una frazione costante del reddito disponibile. Contrariamente ai modelli CGE standard in cui il volume degli investimenti è determinato dai risparmi aggregati (privati, pubblici e del resto del mondo), nel modello è stata adottata una chiusura keynesiana. In particolare, il volume degli investimenti, per ogni tipologia di capitale, è in parte fissato ad un livello esogeno e in parte dipende da una funzione dell'incremento atteso di produttività del capitale. Questa a sua volta dipende da una componente esogena e dagli investimenti e la performance del settore ricerca e sviluppo (R&D). In questo modo, il modello è demand-driven e l'offerta deve quindi adeguarsi alla domanda, mentre la differenza tra esportazioni e importazioni (corrispondente rispettivamente a nuovi crediti o debiti nei confronti del resto del mondo) assorbe la differenza tra risparmi e investimenti domestici, nell'ipotesi di tassi di cambio fissi, oppure è esogena se il tasso di cambio reale è endogeno. In presenza di capacità produttiva sottoutilizzata, anche a causa di incrementi di capacità produttiva dovuta ad investimenti in periodi precedenti, un aumento degli investimenti o della spesa pubblica implica un aumento della domanda aggregata. Questo effetto a sua volta determina un incremento della produzione e un aumento degli input lavoro e capitale impiegati. Ne risulta una riduzione della disoccupazione e un aumento del tasso di utilizzo del capitale. Gli stessi effetti vanno nella direzione opposta (crescita della disoccupazione e riduzione del tasso di utilizzo del capitale), se la capacità produttiva creata nel corso degli anni eccede l'incremento della domanda generata endogenamente dalla crescita economica ed esogenamente dalla spesa pubblica. Tuttavia, se la capacità produttiva inutilizzata in un determinato periodo non è sufficiente ad assorbire l'incremento di domanda aggregata dovuta all'espansione esogena della spesa, i nuovi investimenti rimuovono gli effetti della restrizione, seppure in un periodo successivo, attraverso una espansione della offerta guidata dalla variazione dei prezzi relativi. Il modello è quindi in grado di simulare effetti dal lato della domanda e dell'offerta, tenendo conto della riallocazione delle risorse da parte delle famiglie e delle imprese.

Una variante del modello considera una forma di competizione monopolistica (Dixit e Stiglitz 1977, Zhai 2008) come variante del funzionamento del mercato. In tale variante il prezzo domestico di ogni bene e in ogni regione è superiore rispetto al costo marginale a causa del potere di mercato (markup) detenuto dalle imprese che dipende negativamente dall'elasticità della domanda. Il numero di imprese è endogeno e determinato in modo tale che i profitti siano nulli in ogni periodo, ossia che i ricavi di vendita sono sufficienti per coprire i costi fissi e variabili.

Il tasso di crescita della produttività (TFP o total factor productivity) ha anch'esso una componente esogena, e una endogena. Quest'ultima dipende sia dal legame diretto degli investimenti in ogni settore nell'attività di ricerca e sviluppo, sia dallo spillover di tali attività sul livello di Know-how nell'economia. Questa scelta, che riflette le ipotesi dei modelli di crescita endogena alla Romer, è anche dettata dall'esigenza di rappresentare il processo di creazione di nuove tecniche e beni e l'evoluzione del mercato del lavoro, nel caso in cui il progresso tecnico è neutrale, sicché la produttività totale dei fattori aumenta e predominano le "general purpose technologies", senza che necessariamente questo si traduca in labor saving innovations e aumento della disoccupazione. La tassazione diretta è mantenuta aggregata e, per il momento, non sono contemplate esternalità ambientali.

## Scenari di valutazione di impatto

Il modello di equilibrio economico generale computabile (MEG-SD) e le SAM ad esso associate, consentono di esaminare quantitativamente i rapporti di scambio e di interdipendenza che si stabiliscono tra tutti gli agenti di un sistema economico; quindi, di valutare come gli effetti indiretti della spesa all'interno di un settore possano incidere su alcune importanti variabili economiche, quali la produzione e l'occupazione e sulle loro componenti strutturali.

Nel periodo di costruzione, il progetto agisce sul sistema economico come uno shock esogeno nel settore-istituzione "formazione di capitale". Un progetto di investimento consiste infatti anzitutto nell'acquisto di beni capitali (ossia di beni la cui esistenza sopravvive al periodo di produzione) da parte dei settori produttivi e solo successivamente nell'incremento di capacità produttiva. L'attività di investimento è distribuita tra 7 tipologie di beni capitali ed è determinata per una parte in maniera esogena, come spesa autonoma del governo e delle imprese, e in parte come investimento endogeno. Questo dipende a sua volta dall'incremento di produttività atteso dei beni capitali corrispondenti e dalla crescita endogena di tale produttività come conseguenza della performance dell'investimento in R&D.

L'acquisto di beni determinato direttamente dalla attività di implementazione del progetto, in presenza di capacità produttiva inutilizzata, attiva una catena di approvvigionamento che parte dai settori che forniscono i beni capitali domandati. Questi fornitori, a loro volta, si rivolgono ad altri fornitori in un processo che può coinvolgere, in misura varia, molti settori e porta alla generazione dei cosiddetti effetti indiretti dell'investimento.

L'incremento della spesa contribuisce anche all'aumento dei redditi dei fattori produttivi innescando un secondo circuito moltiplicativo, ancora più potente, perché aumenta il potere d'acquisto e quindi la spesa di istituzioni quali le famiglie e le imprese. Questi effetti prendono il nome di effetti indotti. La possibilità di tenere conto anche di questo circuito moltiplicativo è una delle peculiari potenzialità del modello, ed è l'elemento che maggiormente la differenzia dalla tradizionale analisi input-output. Al termine del periodo di cantiere un settore istituzionale o produttivo diventa proprietario dell'incremento di stock di capitale tangibile o intangibile e il profilo di spesa del settore/istituzione "a regime", ne risulta modificato. In linea di massima, l'investimento a regime viene attribuito a uno o più settori produttivi il cui capitale fisso si accresce come conseguenza del progetto. Per ogni macroregione e per ognuna delle 7 tipologie di capitale distinte a priori, in ogni periodo il capitale risultante dagli investimenti effettuati viene allocato tra i vari settori secondo un principio di efficienza economica che dipende dalla produttività del capitale in ogni settore del periodo stesso.

Il settore che diviene proprietario del progetto di investimento deve essere considerato come interessato da una variazione esogena (l'investimento del periodo di cantiere) e la valutazione dell'impatto a regime (basata su una accurata analisi finanziaria dei ricavi e dei costi di gestione del progetto: costi di manutenzione, salari per gli addetti, acquisto di energia, ecc.) consiste nella stima dell'impatto dell'incremento di capacità produttiva come uno shock esogeno che si protrae per tutta la vita economica dell'investimento. Come conseguenza degli investimenti nel periodo di costruzione e dell'accresciuta capacità produttiva dei settori, inoltre, e sulla base delle aspettative di futura crescita, le imprese possono decidere di accrescere i propri investimenti dando luogo a una sorta di acceleratore, che dipende dalla loro attività di ottimizzazione a fronte dell'evolversi della economia.

Oltre agli effetti diretti di attivazione della domanda dovuti alla spesa nel periodo di cantiere dei progetti, quindi, e in qualche modo sovrapponibili a questi, il modello attribuisce alla spesa per investimenti pubblici ulteriori impatti che non solo stimolano ulteriormente la domanda effettiva, ma mirano anche ad aumentare la dotazione di capitale pubblico negli anni e di conseguenza a produrre effetti su capacità produttiva pubblica e privata. I parametri utilizzati per internalizzare questi effetti sono mutuati dagli studi econometrici, di cui Scandizzo e Pierleoni (2020) presentano una ricognizione recente.

Gli effetti del progetto risulteranno dunque sulla capacità produttiva dei settori, e, grazie al flusso circolare del reddito, si protraggono sui settori istituzionali, mediante incremento dei redditi delle famiglie ed imprese, redditi di Governo e variazione dei rapporti con il resto del Mondo (importazioni/esportazioni) e, in definitiva, si tradurranno in effetti sul PIL sia nazionale che regionale, ed altri aggregati macroeconomici, quali l'occupazione e l'inflazione.

In aggiunta a questi effetti, il modello si propone anche di incorporare un approccio Schumpeteriano sulla natura combinatoria delle innovazioni, in termini di costruzione di nuovi sistemi che combinano vecchie e nuove tecnologie, nonché altri componenti che sono già disponibili come parti del capitale esistente. Oltre che alla nozione di capitale come stock di capacità produttiva, quindi, il modello cerca di tradurre in stime numeriche l'idea che i progetti di investimento sono intraprese che creano nuove forme di capitale e organizzano processi produttivi reali. Il PNRR non è quindi visto solo come un mero esercizio tecnico finalizzato all'attuazione di piani di produzione attraverso applicazioni di best practice. Sebbene non tutti i progetti possano essere innovativi, nel quadro delle riforme previste dal piano, essi possono essere interpretati come tentativi di colmare le lacune nella struttura del capitale, utilizzare nuove tecnologie e trovare nuovi modi per utilizzare quelle esistenti, rimescolando e ricreando i profili di produzione e marketing. La simulazione dell'impatto dei progetti offre quindi l'opportunità di esplorare le opzioni per raggiungere gli obiettivi di recovery e rilancio dell'economia, confrontando alternative e stimando il loro impatto, costi e benefici. In quanto tale, la modellazione di profili alternativi di innovazione e di impatto attraverso la composizione settoriale dell'investimento e delle sue connessioni con l'innovazione tecnologica consente di esplorare scelte economiche che possono avere conseguenze cruciali sia sulle strutture del capitale che sugli esiti di produzione/consumo.

## Descrizione analitica del modello

### Produzione

Il modello è risolto in situazione di concorrenza monopolistica e in situazione di concorrenza perfetta. In situazione di concorrenza monopolistica, la produzione di ogni settore necessita il sostenimento di costi fissi e il prezzo di vendita è fissato ad un livello superiore al costo marginale, dove il mark-up dipende negativamente dall'elasticità della domanda:

$$P_{r,i,t} = mc_{r,i,t} \cdot \frac{\sigma_{r,i}^D}{\sigma_{r,i}^D - 1} \quad (1)$$

In situazione di concorrenza perfetta, il prezzo di mercato coincide con il costo marginale:

$$P_{r,i,t} = mc_{r,i,t}$$

Il livello di produzione, di ogni settore  $i$  in ogni regione  $r$ , é determinato da una funzione di produzione CES di tipo nested. Nel primo livello, la produzione dipende dal valore aggiunto e dal totale dei beni intermedi impiegati:

$$X_{S_{r,i,t}} = \left[ (\alpha_{r,i}^{VA})^{\frac{1}{\sigma_{r,i}^{XS}}} \cdot (VA_{r,i,t})^{\frac{\sigma_{r,i}^{XS}-1}{\sigma_{r,i}^{XS}}} + (\alpha_{r,i}^{r,int})^{\frac{1}{\sigma_{r,i}^{XS}}} \cdot (IntTot_{r,i,t})^{\frac{\sigma_{r,i}^{XS}-1}{\sigma_{r,i}^{XS}}} \right]^{\frac{\sigma_{r,i}^{XS}}{\sigma_{r,i}^{XS}-1}} \quad (2)$$

Le condizioni di massimizzazione del profitto sono le seguenti:

$$VA_{r,i,t} = \alpha_{r,i}^{VA} \cdot \left( \frac{mc_{r,i,t} \cdot (1-\tau_{r,i}^{XS})}{Pva_{i,t}} \right)^{\sigma_i^{XS}} \cdot X_{S_{r,i,t}} \quad (3)$$

$$IntTot_{r,i,t} = \alpha_{r,i}^{IntTot} \cdot \left( \frac{mc_{r,i,t} \cdot (1-\tau_{r,i}^{XS})}{Pint_{r,i,t}} \right)^{\sigma_i^{XS}} \cdot X_{S_{r,i,t}} \quad (4)$$

In concorrenza monopolistica il costo marginale, che coincide con il costo medio, é definito come rapporto tra i costi variabili e il livello di produzione:

$$mc_{r,i,t} = \frac{Pva_{r,i,t} \cdot VA_{r,i,t} + Pint_{r,i,t} \cdot IntTot_{r,i,t}}{(1-\tau_{r,i}^{XS}) \cdot X_{S_{r,i,t}}} \quad (5)$$

In concorrenza monopolistica il numero di imprese  $N_{r,i,t}$  é endogeno e determinato in modo che in ogni settore i ricavi di vendita totali coincidano con il costo variabile e il costo fisso sostenuto da ogni settore:

$$P_{r,i,t} \cdot (1 - \tau_{r,i}^{XS}) \cdot X_{S_{r,i,t}} = Pva_{r,i,t} \cdot VA_{r,i,t} + Pint_{r,i,t} \cdot IntTot_{r,i,t} + N_{r,i,t} \cdot \sum_K W_{r,i,t}^K \cdot K_{S_{r,i,t}}^{Fix} \quad (6)$$

Nel secondo livello, il valore aggiunto dipende dalla domanda di lavoro dipendente aggregato, lavoro indipendente e capitale aggregato:

$$VA_{r,i,t} = \left[ (\alpha_{r,i}^{LdAggr})^{\frac{1}{\sigma_{r,i}^{VA}}} \cdot (LdAggr_{r,i,t})^{\frac{\sigma_{r,i}^{VA}-1}{\sigma_{r,i}^{VA}}} + (\alpha_{r,i}^{LdInd})^{\frac{1}{\sigma_{r,i}^{VA}}} \cdot (LdInd_{r,i,t})^{\frac{\sigma_{r,i}^{VA}-1}{\sigma_{r,i}^{VA}}} + (\alpha_{r,i}^{KdAggr})^{\frac{1}{\sigma_{r,i}^{VA}}} \cdot (KdAggr_{r,i,t})^{\frac{\sigma_{r,i}^{VA}-1}{\sigma_{r,i}^{VA}}} \right]^{\frac{\sigma_{r,i}^{VA}}{\sigma_{r,i}^{VA}-1}} \quad (7)$$

Le condizioni di primo ordine per la massimizzazione del profitto sono:

$$LdAggr_{r,i,t} = \alpha_{r,i}^{LdAggr} \cdot \left( \frac{Pva_{r,i,t}}{W_{r,i,t}^{LdAggr}} \right)^{\sigma_{r,i}^{VA}} \cdot VA_{r,i,t} \quad (8)$$

$$LdInd_{r,i,t} = \alpha_{r,i}^{LdInd} \cdot \left( \frac{Pva_{r,i,t}}{W_{r,t}^{LdInd}} \right)^{\sigma_{r,i}^{VA}} \cdot VA_{r,i,t} \quad (9)$$

$$KdAggr_{r,i,t} = \alpha_{r,i}^{KdAggr} \cdot \left( \frac{Pva_{r,i,t}}{W_{r,i,t}^{KdAggr}} \right)^{\sigma_{r,i}^{VA}} \cdot VA_{r,i,t} \quad (10)$$

$$(Pva_{r,i,t})^{1-\sigma_{r,i}^{VA}} = \alpha_{r,i}^{LdAggr} \cdot (W_{r,i,t}^{LdAggr})^{1-\sigma_{r,i}^{VA}} + \alpha_{r,i}^{LdInd} \cdot (W_{r,t}^{Lind})^{1-\sigma_{r,i}^{VA}} + \alpha_{r,i,t}^{KdAggr} \cdot (W_{r,i,t}^{KdAggr})^{1-\sigma_{r,i}^{VA}} \quad (11)$$

Nel secondo livello, la domanda totale di beni intermedi dipende dalla domanda di ogni bene intermedio che il settore  $i$  compra da ogni altro settore  $i'$  (al prezzo Armington  $PX_{r,i',t}$ ):

$$IntTot_{r,i,t} = \sum_{i'} \left[ \left( \alpha_{r,i',i}^{Int} \right)^{\frac{1}{\sigma_{r,i}^{Int}}} \cdot (Int_{r,i',i,t})^{\frac{\sigma_{r,i}^{Int}-1}{\sigma_{r,i}^{Int}}} \right]^{\frac{\sigma_{r,i}^{Int}}{\sigma_{r,i}^{Int}-1}} \quad (12)$$

Le condizioni di ottimo sono:

$$Int_{r,i',i,t} = \alpha_{r,i',i}^{int} \cdot \left( \frac{Pint_{r,i,t}}{PX_{r,i',t}} \right)^{\sigma_{r,i}^{Int}} \cdot IntTot_{r,i,t} \quad (13)$$

$$(Pint_{r,i,t})^{1-\sigma_{r,i}^{Int}} = \sum_{i'} \alpha_{r,i',i}^{Int} \cdot (PX_{r,i',t})^{1-\sigma_{r,i}^{Int}} \quad (14)$$

Nel terzo livello, la domanda di lavoro dipendente aggregato dipende dalla domanda di ogni tipologia di lavoro dipendente:

$$LdAggr_{r,i,t} = \chi_{r,i,t} \cdot \sum_L \left[ \left( \alpha_{r,i}^L \right)^{\frac{1}{\sigma_{r,i}^L}} \cdot (A_{r,i,t}^L \cdot Ld_{r,i,t}^L)^{\frac{\sigma_{r,i}^L-1}{\sigma_{r,i}^L}} \right]^{\frac{\sigma_{r,i}^L}{\sigma_{r,i}^L-1}} \quad (15)$$

con  $A_{r,i,L,t+1}^L = A_{r,i,L,t}^L \cdot (1 + g_{r,i,L,t+1})$ , dove  $g_{r,i,L,t}$  é il tasso di crescita della produttività del lavoro con skill  $L$  nel settore  $i$  e nella regione  $r$ . Nella formulazione di base del modello, il tasso di crescita della produttività totale dei fattori viene considerato esogeno (e uguale a 1.5%), mentre nella sua variante principale viene considerato endogeno in funzione del tasso di crescita dell'output del settore R&D ( $g_{r,t}^{R\&D}$ ) nella regione  $r$ :

$$g_{r,i,L,t} = 1.5\% + \beta_{R\&D} \cdot g_{r,t}^{R\&D} \quad (16)$$

Le condizioni di ottimo sono:

$$Ld_{r,i,t}^L = (\chi_{r,i,t} \cdot A_{r,i,t}^L)^{\sigma_{r,i}^L-1} \cdot \alpha_{r,i}^L \cdot \left( \frac{W_{r,i,t}^{LdAggr}}{W_{r,t}^L \cdot (1+\tau^{CF})} \right)^{\sigma_{r,i}^L} \cdot LdAggr_{r,i,t} \quad (17)$$

$$(W_{r,i,t}^{LdAggr})^{1-\sigma_{r,i}^L} = \sum_L (\chi_{r,i,t} \cdot A_{r,i,t}^L)^{\sigma_{r,i}^L-1} \cdot \alpha_{r,i}^L \cdot (W_{r,t}^L \cdot (1 + \tau^{CF}))^{1-\sigma_{r,i}^L} \quad (18)$$

dove  $\tau^{CF}$  é il tasso di contribuzione pagato dal datore di lavoro.

Nel terzo livello, il capitale aggregato dipende dall'impiego delle varie tipologie di capitale variabile:

$$KdAggr_{r,i,t} = \sum_K \left[ (\alpha_{r,i,K})^{\frac{1}{\sigma_{r,i}^K}} \cdot (KdVar_{r,i,K,t})^{\frac{\sigma_{r,i}^K}{\sigma_{r,i}^K - 1}} \right]^{\frac{\sigma_{r,i}^K}{\sigma_{r,i}^K - 1}} \quad (19)$$

Le condizioni di ottimo sono:

$$KdVar_{r,i,K,t} \leq \alpha_{r,i}^K \cdot \left( \frac{wkAggr_{r,i,t}}{W_{r,i,t}^K} \right)^{\sigma_{r,i}^K} \cdot KdAggr_{r,i,t} \quad (20)$$

$$(W_{r,i,t}^{KdAggr})^{1-\sigma_{r,i}^K} = \sum_K \alpha_{r,i}^K \cdot (W_{r,i,t}^K)^{1-\sigma_{r,i}^K} \quad (21)$$

Il profitto realizzato dalle imprese del settore  $i$  è uguale ai ricavi ottenuti dalla vendita dei prodotti al netto del costo di produzione (per l'impiego di beni intermedi, delle tre tipologie di lavoro e di lavoro indipendente) e degli investimenti effettuati:

$$\begin{aligned} \Pi_{r,i,t} &= (1 - \tau_{r,i}^{XS}) \cdot Xs_{r,i,t} \\ &\quad - W_{r,i,t}^{LdAggr} \cdot LdAggr_{r,i,t} - W_{r,t}^{Lind} \cdot LdInd_{r,i,t} - Pint_{r,i,t} \cdot IntTot_{r,i,t} \\ &\quad - \sum_K Pinv_{r,K,t} \cdot Inv_{r,i,K,t}^D \end{aligned} \quad (22)$$

Il tasso di rendimento del capitale investito nel settore  $i$  è uguale alla somma tra il profitto e la variazione del valore dell'attivo, rapportata al valore iniziale dell'attivo:

$$r_{r,i,t}^E = \frac{\Pi_{r,i,t} + V_{r,i,t} - V_{r,i,t-1}}{V_{r,i,t-1}} \quad (23)$$

dove il valore dell'attivo è dato dal valore delle 7 tipologie di capitale (variabile e fisso) impiegate nel settore  $i$  e nella regione  $r$ :

$$V_{r,i,t} = \sum_K Pinv_{r,K,t} \cdot (KdVar_{r,i,K,t+1} + N_{r,i,t+1} \cdot Ks_{r,i,K}^{Fix}) \quad (24)$$

## Famiglie

Per ogni tipologia di famiglia  $H$ , il reddito al netto delle imposte è uguale alla somma dei redditi da lavoro dipendente, indipendente e la remunerazione degli attivi:

$$Pc_{r,t}^H \cdot Y_{r,t}^H = (1 - \tau_r^H - \tau^{CH}) \cdot \sum_L W_{r,t}^L \cdot Ls_{r,L,t}^H \cdot (1 - u_{r,t}) \quad (25)$$

$$+ (1 - \tau_r^K) \cdot W_{r,t}^{Lind} \cdot LsInd_{r,t}^H + (1 - \tau_r^K) \cdot \bar{r}_{r,t}^H \cdot A_{r,t}^H \quad (26)$$

dove  $Y_{r,t}^H$  è il reddito espresso in termini reali;  $\tau^H$  è il tasso di tassazione diretta (differenziato secondo la tipologia di famiglia);  $\tau^{CH}$  è il tasso di contribuzione a carico del lavoratore dipendente;  $Ls_{r,L,t}^H$  è la quantità (esogena) di lavoro dipendente offerta per ogni tipologia di lavoro;  $LsInd_{r,t}^H$  è la quantità

(esogena) di lavoro indipendente offerta;  $u_{r,t}$  é il tasso (endogeno) di disoccupazione involontaria;  $A_{r,t}^H$  é il patrimonio detenuto e  $\bar{r}_{r,t}^H$  é il tasso di remunerazione del patrimonio.

Il consumo aggregato (e quindi il risparmio totale) per ogni tipologia di famiglia é uguale a una frazione (esogena e costante) dei redditi percepiti nel corso del periodo, a cui si aggiunge una frazione dell'incremento di patrimonio detenuto:

$$P_{C_{r,t}}^H \cdot C_{r,t}^H = (1 - s_r^H) \cdot (P_{C_{r,t}}^H \cdot Y_{r,t}^H \cdot (1 - \tau^{Hr}) + Tr_{r,t}^{G \rightarrow H} + Tr_{r,t}^{RdM \rightarrow H}) + \beta_A \cdot \Delta A_{r,t}^H \quad (27)$$

dove  $P_{C_{r,t}}^H$  é l'indice dei prezzi al consumo di ogni tipologia di famiglia;  $C_{r,t}^H$  é il consumo aggregato, in termini reali, di ogni tipologia di famiglia;  $s_r^H$  é il tasso di risparmio (esogeno) di ogni tipologia di famiglia;  $\Delta A_{r,t}^H$  é l'incremento del patrimonio ottenuto nel corso del periodo;  $\beta_A$  é la frazione (esogena) dell'incremento di patrimonio che viene consumata.

Ogni tipologia di famiglia ha preferenze CES. La domanda ottimale di beni é la seguente:

$$Xd_{r,i,t}^H = \alpha_{r,i}^H \cdot \left( \frac{P_{C_{r,t}}^H}{PX_{r,i,t}} \right)^{\sigma_r^C} \cdot C_{r,t}^H \quad (28)$$

$$(P_{C_{r,t}}^H)^{1-\sigma_r^C} = \sum_{r,i} \alpha_{r,i}^C \cdot (PX_{r,i,t})^{1-\sigma_r^C} \quad (29)$$

dove  $PX_{r,i,t}$  é il prezzo Armington del bene  $i$ .

Il risparmio di ogni tipologia di famiglia é uguale a:

$$S_{r,t}^H = P_{C_{r,t}}^H \cdot Y_{r,t}^H \cdot (1 - \tau^{Hr}) + Tr_{r,t}^{G \rightarrow H} + Tr_{r,t}^{RdM \rightarrow H} - P_{C_{r,t}}^H \cdot C_{r,t}^H \quad (30)$$

dove  $Tr_{r,t}^{G \rightarrow H}$  sono i trasferimenti (esogeni) dal Governo alle famiglie;  $Tr_{r,t}^{RdM \rightarrow H}$  sono i trasferimenti (esogeni) dal resto del mondo alle famiglie.

Ogni tipologia di famiglia detiene un patrimonio ( $A_{r,t}^H$ ) ripartito tra azioni ( $E_{r,i,t}^H$ ) e obbligazioni statali ( $B_{r,t}^H$ ):

$$A_{r,t}^H = \sum_i E_{r,i,t}^H + B_{r,t}^H \quad (31)$$

Le azioni investite nel settore  $i$  danno un rendimento  $r_{r,i,t}^E$ , mentre le obbligazioni (in titoli di Stato e titoli emessi dal resto del mondo) danno un rendimento (esogeno)  $r_t^B$ . Dato che i rendimenti sono differenti, gli attivi sono assunti come imperfettamente sostituibili.

L'allocazione del portafoglio tra le varie tipologie di attività è determinata dalle condizioni seguenti:

$$\frac{E_{r,i,t}^H}{B_{r,t}^H} = \alpha_{r,i,H}^A \cdot \left( \frac{(1-\tau^K) \cdot r_{r,i,t}^E}{r_t^B} \right)^{\sigma_H^A} \quad (32)$$

Il rendimento medio degli attivi ottenuto da ogni tipologia di famiglia é:

$$\bar{r}_{r,t}^H = \frac{(1-\tau^K) \cdot \sum_i r_{r,i,t}^E \cdot E_{r,i,t}^H + r_t^B \cdot B_{r,t}^H}{A_{r,t}^H} \quad (33)$$

## Governo

Il risparmio del governo, a livello regionale, é dato dalla differenza tra le entrate (tassazione indiretta sulla produzione, tassazione diretta e contributi sui redditi da lavoro dipendente, tassazione sui redditi da lavoro indipendente, tassazione sui redditi da capitale) e le uscite (acquisto di beni e servizi, trasferimenti alle famiglie, interessi sul debito pubblico pagati alle famiglie):

$$\begin{aligned}
 S_{r,t}^G &= \sum_i \tau_{r,i}^{XS} \cdot P_{r,i,t} \cdot X_{S_{r,i,t}} + \sum_{H,L} (\tau_{r,t}^H + \tau^{CF} + \tau^{CH}) \cdot W_{r,t}^L \cdot LS_{r,L,t}^H \cdot (1 - u_{r,t}) \\
 &+ \sum_H \tau^K \cdot (W_{r,t}^{Lind} \cdot LsInd_{r,t}^H + \sum_i r_{r,i,t}^E \cdot E_{r,i,t}^H) \\
 &- (\sum_i P X_{r,i,t} \cdot G_{r,i,t} + \sum_H T r_t^{G \rightarrow H} + \sum_H r_t^B \cdot B_{r,t}^H)
 \end{aligned} \tag{34}$$

La domanda di beni e servizi da parte del governo in termini reali ( $G_{r,i,t}$ ) è esogena.

## Investimenti e accumulazione di capitale

La domanda di beni capitali usati per produrre le 7 tipologie di capitale è determinata dalle equazioni seguenti:

$$\begin{aligned}
 Inv_{r,S7,t} &= InvTot_{r,Comput,t} \\
 Inv_{r,S8,t} &= InvTot_{r,AppEl,t} \\
 Inv_{r,S9,t} &= InvTot_{r,Macch,t} \\
 Inv_{r,S10,t} &= InvTot_{r,Mezzi,t} \\
 Inv_{r,S12,t} &= InvTot_{r,Costr,t} \\
 Inv_{r,S16,t} &= InvTot_{r,R\&D,t}
 \end{aligned} \tag{35}$$

$$Inv_{r,i,t} = \alpha_{r,i}^{Inv} \cdot \left( \frac{P_{Inv_{r,Altro,t}}}{P X_{r,i,t}} \right)^{\sigma_r^{Inv}} \cdot InvTot_{r,Altro,t} \quad \text{con } i \neq S7, S8, S9, S10, S12, S16 \tag{36}$$

In particolare, l'ultima equazione mostra che il bene capitale *Altro* é prodotto utilizzando diversi inputs. La domanda ottimale di questi input é determinata in modo da minimizzare il costo di produzione in presenza di una tecnologia CES.

Il modello utilizza una chiusura Keynesiana. Ciò implica che il livello dell'investimento aggregato non é determinato dal risparmio aggregato. L'investimento, per ogni tipologia di capitale e in ogni regione, é invece determinato da una funzione di investimento:

$$Inv_{r,i,t} = Inv_{r,i,t}^G + Inv_{r,i,t}^{Priv} + InvO_{r,i,t} \cdot \beta_{Inv} \cdot g_{r,t}^{PIL} \tag{37}$$

Dove  $Inv_{r,i,t}^G$  sono gli investimenti pubblici esogeni,  $Inv_{r,i,t}^{Priv}$  sono gli investimenti privati esogeni e  $InvO_{r,i,t} \cdot \beta_{Inv} \cdot g_{r,t}^{PIL}$  sono gli investimenti che dipendono dal tasso di crescita del PIL della regione, secondo il principio dell'acceleratore.

Il prezzo dei beni capitali è definito come segue:

$$\begin{aligned} Pinv_{r,Comput,r,t} &= PX_{r,S7,t} \\ Pinv_{r,AppEl,r,t} &= PX_{r,S8,t} \\ Pinv_{r,Macch,r,t} &= PX_{r,S9,t} \\ Pinv_{r,Mezzi,r,t} &= PX_{r,S10,t} \\ Pinv_{r,Costr,r,t} &= PX_{r,S12,t} \\ Pinv_{r,KnowHow,r,t} &= PX_{r,S16,t} \end{aligned} \quad (38)$$

$$(Pinv_{r,Altro,t})^{1-\sigma_r^{Inv}} = \sum_{i \neq S7,S8,S9,S10,S12,S16} \alpha_{r,i}^{Inv} \cdot (PX_{r,i,t})^{1-\sigma_r^{Inv}} \quad (39)$$

Le tipologie di capitale sono (imperfettamente) mobili tra i settori. Le imprese sono proprietarie di questi capitali e devono decidere in quali settori allocarli. Assumendo un'imperfetta sostituibilità, e indicando con  $K_{r,i,K,t}^{Var}$  il capitale variabile totale disponibile all'inizio di ogni periodo per ogni tipologia di capitale, l'allocazione ottimale tra i vari settori è effettuata in funzione della produttività marginale del capitale:

$$\frac{K_{r,i,K,t}^{Var}}{K_{r,i',K,t}^{Var}} = \frac{\gamma_{r,i,K}^{r,i}}{\gamma_{r,i',K}^{r,i'}} \cdot \left( \frac{W_{r,i,t}^K}{W_{r,i',t}^K} \right)^{\sigma^K} \quad (40)$$

nel rispetto del vincolo di risorse disponibili seguente:

$$K_{STot,r,K,t}^{Var} = \sum_i K_{r,i,K,t}^{Var} \quad (41)$$

## Commercio interregionale e internazionale

Per ogni regione  $r$ , la domanda di beni domestici  $D_{r,i,t}$ , di beni importati dalle altre regioni  $E_{r',r,i,t}^{Reg}$  e di beni importati dal resto del mondo  $M_{r,i,t}^{RdM}$  è determinata assumendo una specificazione alla Armington:

$$D_{r,i,t} = N_{r,i,t} \cdot \alpha_{r,i}^D \cdot \left( \frac{PX_{r,i,t}}{P_{r,i,t}} \right)^{\sigma_{r,i}^M} \cdot X_{r,i,t} \quad (42)$$

$$E_{r',r,i,t}^{Reg} = N_{r',i,t} \cdot \alpha_{r,r',i}^{Reg} \cdot \left( \frac{PX_{r,i,t}}{P_{r',i,t}} \right)^{\sigma_{r,i}^M} \cdot X_{r,i,t} \quad (43)$$

$$M_{r,i,t}^{RdM} = \alpha_{r,i}^{RdM} \cdot \left( \frac{PX_{r,i,t}}{P_i^{RdM} \cdot EXR_t} \right)^{\sigma_{r,i}^M} \cdot X_{r,i,t} \quad (44)$$

$$(PX_{r,i,t})^{1-\sigma_{r,i}^M} = N_{r,i,t} \cdot \alpha_{r,i}^D \cdot (P_{r,i,t})^{1-\sigma_{r,i}^M} + \sum_{r'} N_{r',i,t} \cdot \alpha_{r,r',i}^{Reg} \cdot (P_{r',i,t})^{1-\sigma_{r,i}^M} + \alpha_{r,i}^{RdM} \cdot (P_i^{RdM} \cdot EXR_t)^{1-\sigma_{r,i}^M} \quad (45)$$

dove  $X_{r,i,t}$  rappresenta un bene composto definito nel modo seguente:

$$X_{r,i,t} = \sum_{i'} Int_{r,i,i',t} + Xd_{r,i,t} + Inv_{r,i,t} + G_{r,i,t} \quad (46)$$

Le esportazioni verso il resto del mondo sono determinate dalla funzione di domanda seguente che dipende dal prezzo relativo (prezzo estero / prezzo domestico):

$$E_{r,i,t}^{RdM} = \alpha_{r,i,t}^{ERdM} \cdot \left( \frac{P_i^{RdM} \cdot EXR_t}{P_{r,i,t}} \right)^{\sigma_{r,i}^E} \quad (47)$$

La bilancia dei pagamenti di ogni regione é definita dall'equazione:

$$S_{r,t}^{RdM} = \sum_i P_i^{RdM} \cdot EXR_t \cdot M_{r,i,t}^{RdM} - \sum_i P_{r,i,t} \cdot E_{r,i,t}^{RdM} - r_t^B \cdot B_{r,t}^{RdM} - \sum_H T_{r,t}^{RdM \rightarrow H} \quad (48)$$

A livello nazionale, la bilancia dei pagamenti é definita dall'equazione:

$$S_t^{RdM} = \sum_r S_{r,t}^{RdM} \quad (49)$$

Il risparmio nazionale é fissato a una frazione costante del PIL reale e il tasso di cambio reale é determinato dalla bilancia dei pagamenti nazionale.

La bilancia commerciale interregionale é definita dall'equazione seguente:

$$S_{r,r',t}^{Reg} = \sum_i P_{r',i,t} \cdot E_{r',r,i,t}^{Reg} - \sum_i P_{r,i,t} \cdot E_{r,r',i,t}^{Reg} \quad (50)$$

$$\text{con } \sum_{r,r'} S_{r,r',t}^{Reg} = 0.$$

## Equilibrio

A livello regionale, la condizione d'equilibrio tra i risparmi e gli investimenti è la seguente:

$$\sum_K P_{inv,r,K,t} \cdot InvTot_{r,K,t} = \sum_H S_{r,t}^H + S_{r,t}^G + \sum_{r'} S_{r,r',t}^{Reg} + S_{r,t}^{RdM} \quad (51)$$

A livello regionale, per il mercato del lavoro (per ogni tipologia di lavoro), l'offerta è fissata esogenamente, mentre la domanda è endogena e prevede un livello di disoccupazione minimo (NAIRU).

$$Ld_{r,i,L,t} \leq (1 - u_{r,i,L,t}) \cdot Ls_{r,i,L,t} \quad (52)$$

$$U_{r,i,L,t} = (1 - u_{r,i,L,t}) \cdot Ls_{r,i,L,t} - Ld_{r,i,L,t} \quad (53)$$

$$\frac{\sum_{r,i,L,t} u_{r,i,L,t} \cdot Ls_{r,i,L,t}}{\sum_{r,i,L,t} Ls_{r,i,L,t}} = NAIRU \quad (54)$$

A livello regionale, la condizione di equilibrio sul mercato di lavoro indipendente è la seguente:

$$\sum_i LdInd_{r,i,t} \leq \sum_H LsInd_{r,t}^H \cdot (1 - u_{r,t}) \quad (55)$$

A livello regionale, la condizione di equilibrio sul mercato del capitale (per ogni tipologia di capitale e in ogni settore) è la seguente:

$$Kd_{r,i,K,t}^{Var} \leq z_{r,t} \cdot Ks_{r,i,K,t}^{Var} \quad (56)$$

A livello regionale, la condizione di equilibrio sul mercato dei beni è la seguente:

$$Xs_{r,i,t} = D_{r,i,t} + \sum_{r'} E_{r,r',i,t}^{Reg} + E_r^{RdM} \quad (57)$$

## Dinamica

Per ogni tipologia di capitale, la dinamica della quantità disponibile in ogni regione è la seguente:

$$KsTot_{r,K,t+1}^{Var} + \sum_i N_{r,i,t+1} \cdot Ks_{r,K}^{Fix} = (KsTot_{r,K,t+1}^{Var} + \sum_i N_{r,i,t+1} \cdot Ks_{r,K}^{Fix}) \cdot (1 - \delta_{r,i}) + InvTot_{r,K,t} \quad (58)$$

Per ogni tipologia di domanda di capitale, la condizione di equilibrio è:

$$Ks_{r,i,K,t+1}^{Var} = Ks_{r,i,K,t}^{Var} \cdot (1 - \delta_K) + Inv_{r,i,K,t}^D \quad (59)$$

La dinamica del patrimonio detenuto da ogni tipologia di famiglia in ogni regione è la seguente:

$$A_{r,t+1}^H = A_{r,t}^H + S_{r,t}^H \quad (60)$$

A livello nazionale, la dinamica del debito del governo e del debito verso il resto del mondo sono rispettivamente:

$$B_{t+1}^G = B_{t+1}^G - \sum_r S_{r,t}^G \quad (61)$$

$$B_{t+1}^{RdM} = B_{t+1}^G - \sum_r S_{r,t}^{RdM} \quad (62)$$

## Riferimenti Bibliografici

Aghion P, Antonin C, Bunel S (2021) The Power of Creative Destruction: Economic Upheaval and the Wealth of Nations, Belknap Press, Cambridge, MA.

Amiel Y, Cowell F (2003) Inequality, Welfare and Monotonicity. In Inequality, Welfare and Poverty: Theory and Measurement, Vol 9:35–46, Elsevier Science.

Armington PS (1969) A theory of demand for products distinguished by place of production. IMF Staff Pap 16(1):159–178.

- Arrow K, Debreu G (1954) Existence of a competitive equilibrium for a competitive economy. *Econometrica* 22(3):265–290.
- Bellù LG (2014) Analyzing policy impacts and international price shocks: alternative computable general equilibrium (CGE) models for an aid dependent less-industrialized country.
- Böhringer C, Boeters S, Feil M (2005) Taxation and unemployment: an applied general equilibrium approach. *Econ Model* 22:81–108.
- Bovenberg AL, Graafland JJ, de Mooij RA (2000) Tax reform and the Dutch labour market: an applied general equilibrium approach. *J Public Econ* 78(1):193–214.
- Dalla Chiara E, Menon M, Perali F. (2019). An Integrated Database to Measure Living Standards. *Journal of Official Statistics*. 35(3), 531-576.
- Devarajan S, Robinson S (2005) The influence of computable general equilibrium models on policy.
- Dixit AK, Stiglitz JE (1977) Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity. *The American Economic Review*. Vol. 67(3):297-308
- Dixon PB, Jorgenson DW (2013) Handbook of computable general equilibrium modeling.
- Gunning JW, Keyzer MA (1995) Applied general equilibrium models for policy analysis. *Handb Dev Econ* 3:2025–2107.
- ISTAT (2014) Il sistema di tavole input-output. Anno 2011
- ISTAT (2015a) La matrice dei conti nazionali. Anno 2011
- ISTAT (2015b) Conti economici nazionali. Anno 2011
- ISTAT (2015c) Rilevazione sulle forze di lavoro. Anno 2011
- Johansen, L. (1959) “Substitution versus Fixed Production Coefficients in the Theory of Economic Growth: A Synthesis.” *Econometrica* 27: 157–76.
- Kaldor N (1995) Alternative theories of distribution. *Rev Econ Stud* 23(2):83–100.
- Keynes JM (1936) *The general theory of employment, interest and money*. The Eston Press, Norwalk.
- Lambert, PJ (1985) Social welfare and the Gini coefficient revisited. *Mathematical Social Science*, 9, 19–26.
- Lambert, PJ (1993) *The distribution and redistribution of income* (2nd ed.). Manchester: Manchester University Press.
- Mercenier J, MT Alvarez Martinez, A Brandsma, F Di Comite, O Diukanova, d’Artis Kancs, P Lecca, M Lopez-Cobo, P Monfort, D Persyn (2016) RHOMOLO-v2 Model Description: A spatial computable general equilibrium model for EU regions and sectors. JRC Working Papers JRC100011, Joint Research Centre (Seville site).

Merrill OH (1972) Applications and extension of an algorithm that computes fixed points of certain upper semi-continuous point to set mapping. Department of Industrial Engineering, University of Michigan, Ann Arbor.

NADEF (2021) Nota di Aggiornamento al Documento di Economia e Finanza. Ministero dell' Economia e delle Finanze. 29 Settembre 2021, Roma.

Perali F, Scandizzo PL (2018) General equilibrium modelling: the integration of policy and project analysis. In: The new generation of computable general equilibrium models.

Phelps, E. S. (1963). Substitution, fixed proportions, growth, and distribution. *International Economic Review*, 4(3), 265-288.

Scandizzo PL (2021) Impact and cost–benefit analysis: a unifying approach, *Journal of Economic Structure*.

Scandizzo PL, Ferrarese C (2015) Social accounting matrix: A new estimation methodology. *Journal of Policy Modeling*, Vol. 37 (1):14-34.

Scandizzo, P.L. and Pierleoni, M.R., 2020. Short and Long-Run Effects of Public Investment: Theoretical Premises and Empirical Evidence. *Theoretical Economics Letters*, 10(04), p.834.

Scarf HE (1960) Some examples of global instability of the competitive equilibrium. *Int Econ Rev* 1:157–172.

Scarf HE (1967) The approximation of fixed points of a continuous mapping. *SIAM J Appl Math* 15:1328–1343.

Scricciu S (2007) How useful are computable general equilibrium models for sustainability impact assessment. *Impact Assess Sustain Dev Eur Pract Exp* 8:131–143.

Severini F, Felici F, Ferracuti N, Pretaroli R, Socci C (2018) Gender policy and female employment: a CGE model for Italy. *Econ Syst Res* 1:1–22.

Shoven JB, Whalley J (1974) A proof of the existence of a general equilibrium with ad valorem commodity taxes. *J Econ Theory* 8:1–25

SIOPE (2015) Entrate e uscite delle amministrazioni pubbliche. Anno 2011.

Socci, C., Felici, F., Pretaroli, R., Severini, F., Loiero, R. (2021) The Multisector Applied Computable General Equilibrium Model for Italian Economy (MACGEM-IT). *Italian Economic Journal* Vol. 7, 109–127.

Solow R. M. (1956) A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics* 70: 65–94

Standardi G, Perali F, Pieroni L (2012) World Tariff Liberalization in Agriculture: An Assessment Following a Global CGE Trade Model for EU15 Regions. *Journal of Policy Modeling*, Vol. 34(2): 155-180.

Suranovic S (2010) *International trade: theory and policy*. Springer, Berlin Google Scholar United Nations (2008) *System of national accounts*. UNSO, New York.

Taylor L (1990) Structuralist CGE models. In: Taylor L (ed) Socially relevant policy analysis: structural computable general equilibrium models for developing world. MIT Press, Cambridge, 1–70.

Thyssen M (1998) A classification of empirical CGE modelling. University of Groningen, Groningen.

Van der Laan G, Talman AJ (1979) A restart algorithm for computing fixed point without an extra-dimension. Math Program 17:74–84.

Walras L (1874) Elements of pure economics. Routledge, New York.

Willenbockel D (1994) Applied general equilibrium modelling: imperfect competition and European integration. Wiley, Hoboken.

Zhai F (2008) Armington Meets Melitz: Introducing Firm Heterogeneity in a Global CGE Model of Trade. Journal of Economic Integration 23(3): 575-604.